blockwise m-dependent 確率変数列の大数の強法則について (Martingaleに関連する諸問題)

吾妻, 一興

数理解析研究所講究録
706巻 1989年 164-166

blockwise m-dependent 確率変数列の大数の強法則について

宮教大　吾妻一興 (Kazuoki Azuma)

$\{X_k\}$ を確率変数列とし, $E(X_k)=0$, $E(X_k^2)=\sigma_k^2<\infty$ とする。

$\{X_k\}$ が blockwise m-dependent であるというのは,
十分大きな $p\in\mathbb{N}$ に対して, $2^{p-1}<k<l\leq 2^p$, $l-k>m$ なら,
2つの集合 $\{X_{2^{p-1}+1},\cdots,X_k\}$ と $\{X_l, X_{l+1},\cdots,X_{2^p}\}$
が独立なることであり,

$\{X_k\}$ が blockwise quasi-orthogonal というのは,
$\forall p\in\mathbb{N}$, $^\exists f_p(j)$, $j=0,1,\cdots,2^{p-1}-1$;

$$\begin{cases} |E(X_k X_l)| \leq \sigma_k\sigma_l f_p(|k-l|), & 2^{p-1}<k,l\leq 2^p \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{2^{p-1}-1} f_p(j)\leq C \end{cases}$$

が成り立つことと定義する。

これらに関する F. Móricz の結果を紹介する。

<u>定理1</u>　$\{X_k\}$ が blockwise m-dependent なら

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma_k^2}{k^2}<\infty \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\to 0 \quad a.s.\ (n\to\infty)$$

定理２　$\{x_k\}$ が blockwise quasi-orthogonal なら

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 [\log(k+1)]^2 < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \text{ conv. a.s. } (n\to\infty)$$

従って，Kronecker の lemma を用いて，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k^2}{k^2} [\log(k+1)]^2 < \infty \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to 0 \quad \text{a.s. } (n\to\infty)$$

定理１の証明は，定義から，$\exists p, t \in N$; $2^{p-1} < k_1 < k_2 < \cdots < k_t \leqq 2^p$，$k_{\tau+1} - k_\tau > m$ $(\tau = 1, 2, \cdots, t-1;\ t \geqq 2)$ なら，確率変数列 $x_{k_1}, x_{k_2}, \cdots, x_{k_t}$ が互いに独立であることと，モーメント不等式

$$E\left(\sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} x_k\right)^2 \leqq C_1 \sum_{k=2^{p-1}+1}^{2^p} \sigma_k^2$$

が成り立つことによる。

定理２の証明も，a, n を $a+1$, $a+n$ が同じ dyadic block に属するもの，即ち $\exists p \geqq 1$; $2^{p-1} < a+1 \leqq a+n \leqq 2^p$ としたとき，モーメント不等式

$$E\left(\sum_{k=a+1}^{a+n} x_k\right)^2 \leqq C_2 \sum_{k=a+1}^{a+n} \sigma_k^2$$

が成り立つことによる。

なお，blockwise m-dependent の場合には，

$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$ から $\sum x_k$ conv. a.s. は導けない。

参考文献

1. F. Móricz. Strong limit theorems for blockwise m-dependent and blockwise quasiorthogonal sequences of random variables. Proc. Amer. Math. Soc. 101 (1987), 709–715.

2. F. Móricz. Moment inequalities and the strong laws of large numbers. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 35 (1976), 299–314.